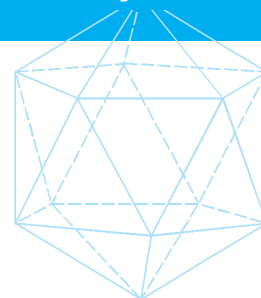




Osiągnięcia Nauki i Techniki Kierunki Rozwoju i Metody

KONWERSATORIUM POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ
Wkładka nr 12 do Miesięcznika Politechniki Warszawskiej nr 3/2008

Redaktor merytoryczny — Stanisław Janeczko



Czarne dziury: obiekty odkryte w przyrodzie czy wymyślone przez człowieka?

Na podstawie odczytu wygłoszonego w dniu 24 maja 2007 roku

Jerzy Kijowski

Centrum Fizyki Teoretycznej PAN
Aleja Lotników 32/46, 02-668 Warszawa
kijowski@uw.edu.pl

1. Rola spekulacji teoretycznych w fizyce

Fizyka jest nauką empiryczną. Tę prawdę wbijano mi do głowy przez całe dzieciństwo i młodość, ostro przeciwstawiając „postępowe” nauki doświadczalne „scholastycznym spekulacjom”, które jedynie hamowały rozwój cywilizacji. Taka postawa filozoficzna nie jest nowa. Wyraziście była eksponowana np. w dziele Sykstusa Empiryka napisanym około 200 r.n.e., a zatytułowanym bardzo wymownie *Przeciw Matematykom* (Πρὸς μαθηματικῶν).

Tymczasem u podstaw nowożytnej fizyki leżą mocno spekulatywne zasady dynamiki Galileusza-Newtona! Rzeczywiście — czy ktoś z nas miał kiedykolwiek do czynienia w potocznym doświadczeniu z pojazdem, który porusza się ruchem jednostajnym, mimo że nie działa nań żadna siła (bo np. wyczerpała się benzyna)?

Nieraz więc bywało tak, że **nauka rozwijała się właśnie dzięki czysto teoretycznym „spekulacjom”**,

a przewidywane w ten sposób obiekty czy zjawiska fizyczne musiały potem długo jeszcze czekać na „prawdziwe” — to znaczy eksperymentalne — odkrycie, stanowiące ostateczne potwierdzenie słuszności rozumowania, które doprowadziło do ich pierwszego — teoretycznego — odkrycia.

Tak się zdarzyło np. przewidzianym przez Maxwella falom elektromagnetycznym. Pojawiły się one jako matematycznie konieczne rozwiązania równań elektrodynamiki, gdy ich twórca poprawił równanie Ampère'a z czysto „spekulatywnych” powodów, wprowadzając doń tzw. **prąd przesunięcia**, by stało się zadość prawu zachowania ładunku. Podnosząc to prawo do rangi podstawowej zasady uniwersalnej Maxwell odkrył „po raz pierwszy” fale radiowe, bez których trudno sobie wyobrazić nasze współczesne życie. A przecież na drugie — doświadczalne — odkrycie musiały potem czekać

jeszcze prawie 40 lat, kiedy to zostały „wprzęgnięte w służbę ludzkości” przez Heinricha Hertza, Guglielmo Marconiego lub Aleksandra Popowa (to, którego z nich uznajemy za twórcę radia zależy od tego w jakim kraju, czy nawet ustroju politycznym, kończyliśmy szkoły).

Tak zwane „czarne dziury”, podobnie zresztą jak fale grawitacyjne, są matematycznie konsekwencją nowoczesnej teorii grawitacji sformułowanej w 1915 roku

przez Alberta Einsteina. Nie dysponujemy do tej pory wynikami obserwacji, które w sposób niewątpliwie doprowadziłyby ich istnienia w Kosmosie, choć mamy wiele pośrednich argumentów za tym, by pewne obiekty astronomiczne interpretować właśnie jako czarne dziury. Status epistemologiczny „czarnych dziur” jest więc obecnie analogiczny do statusu fal radiowych w roku — powiedzmy — 1870.

2. Czy grawitacja da się sprowadzić do czystej geometrii?

Historia einsteinowskiej teorii grawitacji, popularnie zwanej „ogólną teorią względności”, też zaczęła się od czystej spekulacji. Wspaniale rozwinięta w XIX wieku mechanika nieba, oparta na teorii newtonowskiej, znakomicie tłumaczyła obserwowane zjawiska astronomiczne i z czysto eksperymentalnego punktu widzenia nie było żadnych powodów, by tę teorię zmieniać. Tymczasem jednak w 1905 roku Einstein zaproponował nową teorię ruchu i nowy opis pola elektromagnetycznego. Chodziło m.in. o to, by wytłumaczyć zaobserwowany fakt niezależności prędkości światła od prędkości mierzącego ją obserwatora. Ta nowa teoria, zwana „szczególną teorią względności”, odniosła ogromny sukces, dostarczając znakomitego narzędzia do opisu zjawisk fizycznych polegających na oddziaływaniu elektromagnetycznym — i to opisu zgodnego z doświadczeniem Michelsona-Morleya. Ponieważ miała ona charakter uniwersalnej teorii czasu i przestrzeni, wielki myśliciel, jakim był Einstein, spróbował opisać siły grawitacyjne w swoim nowym, czterowymiarowym, „relatywistycznym formalizmie”. Okazało się to niemożliwe, a w każdym razie nie było na to żadnej prostej i naturalnej recepty. Po kilku latach rozmyślań Einstein doszedł do wniosku, że trajektorie swobodnie spadających ciał (to znaczy ciał poddanych jedynie działaniu sił grawitacyjnych) są po prostu „najbardziej prostymi ze wszystkich możliwych” liniami w (prawdopodobnie) krzywej czasoprzestrzeni. Punktem wyjścia do tej hipotezy była powszechnie obserwowana równość masy inercjalnej i masy grawitacyjnej różnych ciał — począwszy od skali słynnego newtonowskiego jabłka, do skali obserwowanych ciał niebieskich. Łatwo zrozumieć o co chodzi, przyglądając się np. równaniu Newtona opisującemu ruch ciała o masie m i ładunku elektrycznym e , poruszającego się pod wpływem pola elektrycznego \vec{E}

$$m\vec{a} = e\vec{E} \quad (1)$$

Ciała o równych masach, ale różnych ładunkach poruszają się zupełnie inaczej! Tymczasem dla sił grawitacyjnych analogiczne równanie Newtona wygląda następująco

$$m\vec{a} = m\vec{G} \quad (2)$$

gdzie \vec{G} oznacza „pole sił grawitacyjnych” (równe np. gradientowi potencjału grawitacyjnego z ujemnym znakiem). Występujący po lewej stronie czynnik m określa bezwładność ciała — podobnie jak to miało miejsce w przypadku równania (1). Natomiast występująca po prawej stronie wielkość m odgrywa rolę „ładunku grawitacyjnego” i mierzy „wrażliwość ciała” na oddziaływanie pola grawitacyjnego. Z punktu widzenia teorii Newtona to m po prawej stronie mogłoby być różne od tego m po lewej stronie i nie prowadziłoby to do żadnych komplikacji filozoficznych. Tymczasem jednak wszelkie pomiary (począwszy od Galileusza, rzucającego ponoć różne przedmioty z Krzywej Wieży w Pizie) pokazują, że obie masy są sobie **zawsze równe**. Oznacza to, że równanie (2) można podzielić przez m . Wobec tego trajektorie ciał spadających swobodnie są takie same dla różnych ciał. Jabłko powinno poruszać się po takiej samej orbicie okołosłonecznej jak planeta. Powinniśmy zatem traktować tę orbitę jako jakąś uniwersalną własność geometryczną czasoprzestrzeni, w której „żyje” pole grawitacyjne \vec{G} , niezależną od tego, jakim ciałem (jabłkiem czy planetą) posługujemy się w celu jej zbadania. O jaką własność może tutaj chodzić?

Einstein znalazł odpowiedź w powstałej wcześniej geometrii nieeuklidesowej i zaproponował, by odejść od obrazu czasoprzestrzeni jako obiektu „idealnie płaskiego”, do którego stosują się pojęcia geometrii euklidesowej, znane nam z kursu szkolnego, na przykład możliwość absolutnego, niezależnego od drogi, transportu równoległego na dowolne odległości. To, co w małej skali jest banalnie proste, np. przyłożenie ekerki do linijki i przesunięcie jej dożądanego punktu, w wielkiej skali jest — być może — niewykonalne. Czasoprzestrzeń, w której żyjemy, jest prawdopodobnie zakrzywiona, a ciała spadające swobodnie poruszają się po liniach „najbardziej prostych z możliwych”. Do linii tych nie stosują się twierdzenia geometrii euklidesowej, jak np. aksjomat Euklidesa o prostych równoległych czy też twierdzenie o sumie kątów w trójkącie. Grawitacja to po prostu odstępstwo geometrii czasoprzestrzennej od „płaskości”. W dalszym ciągu tego wykładu pokażę, jak najprościej można opisać taką strukturę.

3. Co to są linie „proste” w krzywej przestrzeni?

Najwcześniej, bo już w dobie wielkich odkrywców geograficznych, poznana „krzywą przestrzeni”, dla której opis oparty na geometrii euklidesowej przestał wystarczać, była powierzchnia globu ziemskiego. Żeglując po oceanie najłatwiej jest trzymać się tzw. loksodromy, czyli linii przecinającej siatkę geograficzną, złożoną z południków i równoleżników, pod stałym kątem. W takiej żegludze sternik musi po prostu trzymać ciągle ten sam kurs kompasowy. We współrzędnych geograficznych (θ, φ) równanie takiej trajektorii ruchu wygląda rzeczywiście tak, jak równanie linii prostej na płaszczyźnie wyrażone we współrzędnych kartezjańskich

$$\theta(t) = \theta_0 + at \quad \varphi(t) = \varphi_0 + bt \quad (3)$$

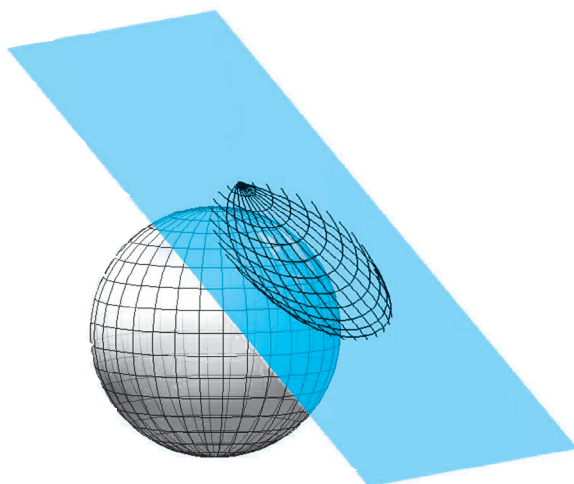
gdzie t jest dowolnym parametrem afinicznym (na przykład czasem, gdy statek płynie ze stałą prędkością). Równania te można zapisać równoważnie w postaci warunku na znikanie drugich pochodnych obu funkcji

$$\ddot{\theta}(t) = 0 \quad \ddot{\varphi}(t) = 0 \quad (4)$$

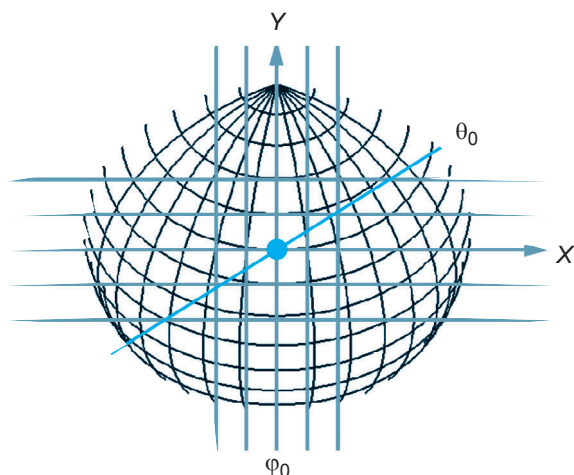
co gwarantuje liniową zależność obu funkcji od parametru.

Nazwa **loksodroma** pochodzi od greckich słów „loksos” (ukośny, krzywa) oraz „dromós” (bieg, linia). Ale cóż to za linia „skośna”? W żegludze po morzu Bałtyckim może być nawet przydatna, ale wystarczy popatrzeć na globus by zauważyć, że żegluga po loksodromie z Plymouth do Nowego Yorku to ogromna strata czasu! A w pobliżu biegunów loksodroma coraz bardziej zbliża się do spirali Archimedesesa i poruszanie się po niej przypominałoby raczej taniec św. Wita niż jakiegokolwiek sensowne zmierzanie do celu.

Gdyby na globusie naciągnąć gumkę umocowaną na końcach w dwóch miastach leżących po różnych stronach oceanu, to wyznaczyłaby ona zupełnie inną trasę, zwaną „ortodromą” (gr. orto, orthós — prosty), czyli linią prostą. Jest to łuk wielkiego koła na kuli i czu-



Rysunek 1. Rzut siatki geograficznej na płaszczyznę styczną do kuli



Rysunek 2. Współrzędne geograficzne a lokalne współrzędne „prostoliniowe”

jemy instyktownie, że wyznacza najkrótszą drogę między punktem startu a punktem docelowym.

Wyznaczanie ortodromy to najbardziej typowe zadanie, jakie rozwiązują studenci wydziału nawigacji w szkole morskiej. Trzeba się tu wyzybyć przywiązania do funkcji liniowych typu (3), bowiem równanie różniczkowe opisujące ortodromę we współrzędnych geograficznych (θ, φ) jest dużo bardziej skomplikowane niż warunek (4) na znikanie „przyspieszenia”, czyli drugich pochodnych. Aby je tutaj wyprowadzić zauważmy, że w każdym punkcie globu (θ_0, φ_0) można wybrać takie **lokalne współrzędne** (x, y) , żeby **przynajmniej w tym jednym punkcie** równanie ortodromy wyglądało tak jak (4)

$$\ddot{x}(t) = 0 \quad \ddot{y}(t) = 0 \quad (5)$$

W tym celu rozważymy płaszczyznę styczną do globusa w naszym „miejscu postoju” (θ_0, φ_0) — niech będzie to na przykład kartka papieru. Jak to widać na rysunku 1, rzut siatki geograficznej z globusa na naszą kartkę daje wysoce nieprostoliniowy układ współrzędnych. Gdyby nasze miejsce postoju znajdowało się na lądzie, to siatka ta zupełnie nie nadawałaby się jako lokalna mapa do celów geodezyjnych, takich jak wytyczanie sieci równoległych ulic czy obrysów działek w naszej miejscowości.

Do tych celów najlepiej używać siatki współrzędnych kartezjańskich na kartce. Gdy zrzutujemy je (za pomocą rzutu prostopadłego) z naszej kartki papieru na globus, otrzymamy właśnie lokalnie najlepsze, „wprostowane” współrzędne. Wybierzmy na przykład oś X w kierunku wschodnim, zaś oś Y — prostopadłe (w kierunku północnym), przy czym, dla uproszczenia rachunków, niech obie będą zaczepione właśnie w naszym „miejscu postoju” (θ_0, φ_0) (zob. rys. 2). Odrobina znajomości trygonometrii pozwoli nam stwierdzić, że zależność między współrzędnymi geograficznymi a naszymi

„lokalnie prostoliniowymi” współrzędnymi (x, y) , skopio-
wanymi z płaskiej kartki, wyraża się następującymi wzorami

$$\theta = \theta_0 - y + Ax^2 + \text{człony wyższego rzędu} \quad (6)$$

$$\varphi = \varphi_0 + x(1 + By) + \text{człony wyższego rzędu} \quad (7)$$

Pozwoliłem sobie na pewną nonszalancję w zapisie powyższych wzorów, bowiem chcę zwrócić uwagę na jego strukturę, a do tego ani wartość stałych A i B , ani szczegółowa informacja o członach rzędu wyższego niż kwadratowy, nie jest potrzebna. Otóż człony rzędu zerowego zostały wprowadzone tylko po to, by odpowiednio „scentrować” nasze współrzędne, czyli by zero układu (x, y) przypadło właśnie w punkcie (θ_0, φ_0) . Wybór ten jest nieistotny z punktu widzenia naszego celu, jakim jest „wprostowanie” równania ortodromy do najprostszej postaci (5). Człony rzędu pierwszego zostały wybrane tak, by osie X i Y były odpowiednio skierowane. Znak „minus” przed zmienną y w pierwszym równaniu pochodzi stąd, że jako matematyk liczę „szerokość geograficzną” θ od bieguna północnego w dół (na południe). Tymczasem jako nawigator wolę liczyć współrzędną y na mapie w górę (na północ). Ale to również jest **nieistotne** z punktu widzenia naszego celu i dowolna transformacja liniowa współrzędnych (x, y) będzie równie dobra. Także człony wyższego rzędu są nieistotne, bowiem w punkcie $(x, y) = (0, 0)$ nie dają wkładu do równania (5). To co istotne, to człony kwadratowe, reprezentowane tutaj przez dwie stałe A i B . Odrobina znajomości trygonometrii wystarczy, by się przekonać, że ich wartości wynoszą

$$A = \frac{1}{2} \sin \theta_0 \cos \theta_0 \quad B = \text{ctg} \theta_0 \quad (8)$$

Gdybyśmy mieli osiąść na stałe w miejscowości (θ_0, φ_0) , to już nigdy inna mapa nie byłaby nam potrzebna — ta jest najlepsza ze wszystkich możliwych. Jeśli jednak punkt (θ_0, φ_0) znajduje się na oceanie, a my jesteśmy nawigatorami w podróży, to niestety nasza doskonała (w otoczeniu punktu (θ_0, φ_0)) mapa wkrótce się zdezaktualizuje i trzeba będzie ją szybko wymienić na inną, dostosowaną do innego punktu. Nie możemy jednak wziąć ze sobą tak ogromnej, po jednej dla każdego małego otoczenia kolejno mijanych punktów globu, liczby map! Przeprośmy się zatem z „bardziej globalnymi” współrzędnymi geograficznymi i przeliczmy równanie ortodromy (5) (oznaczonej kolorem niebieskim na rys. 2) do tych współrzędnych. Różniczkując stronami wzory (6) i (7) otrzymujemy

$$\dot{\theta} = -\dot{y} + 2Ax\dot{x} \quad (9)$$

$$\ddot{\theta} = -\ddot{y} + 2A\dot{x}\dot{x} + 2Ax\ddot{x} \quad (10)$$

$$\dot{\varphi} = \dot{x} + Bx\dot{y} + B\dot{x}y \quad (11)$$

$$\ddot{\varphi} = \ddot{x} + 2B\dot{x}\dot{y} + Bx\ddot{y} + B\dot{x}\dot{y} \quad (12)$$

Ale w zmiennych „wprostowanych” równanie ortodromy to znikanie drugich pochodnych (5). Zatem w naszym punkcie postoju $(x, y) = (0, 0)$ równanie ortodromy wygładza następująco

$$\ddot{\theta} = 2A\dot{x}\dot{x} = 2A\dot{\varphi}^2$$

$$\ddot{\varphi} = 2B\dot{x}\dot{y} = -2B\dot{\varphi}\dot{\theta}$$

(uwzględniono związki $\dot{\theta} = -\dot{y}$ oraz $\dot{\varphi} = \dot{x}$, wynikające z (9) i (11)). Po wstawieniu wartości stałych (8) otrzymujemy następujące równanie ortodromy

$$\ddot{\theta} = \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta \quad (13)$$

$$\ddot{\varphi} = -2\dot{\varphi}\dot{\theta} \text{ctg} \theta \quad (14)$$

obowiązujące już uniwersalnie, w każdym punkcie (θ, φ) , czyli na całym globie.

Powyższe, prościutkie opowiadanie można teraz sformalizować w postaci następującej „wylizanki” istotnych z naszego punktu widzenia własności, jakie wykorzystaliśmy do stworzenia wygodnego modelu matematycznego powierzchni globu ziemskiego M jako tzw. **przestrzeni ze strukturą powiązania**. Przestrzeń ta może być krzywa, ale lokalnie przypomina przestrzeń afiniczną, w której jest dobrze określone pojęcie linii prostej. Oto te własności:

- Przestrzeń M jest różniczkowalną. Oznacza to, że lokalnie można parametryzować punkty zbioru M układem współrzędnych $(x^k) = (x^1, x^2, \dots, x^n)$, gdzie liczba naturalna n nazywa się **wymiarem przestrzeni** (dla powierzchni globu ziemskiego $n = 2$, ale to nie ma żadnego znaczenia). Jeśli (y^a) , $a = 1, \dots, n$, jest innym układem współrzędnych (mapą), to (tam gdzie to możliwe) transformacja $y^a = y^a(x^k)$ jest odpowiednio gładka (np. różniczkowalna klasy C^∞).
- W każdym punkcie $m \in M$ można wprowadzić relację równoważności \sim_m między układami współrzędnych wokół m . Powiemy, że układy (x^k) oraz (y^a) są równoważne w m , jeśli ich wzajemne drugie pochodne znikają w tym punkcie

$$((x^k) \sim_m (y^a)) \Leftrightarrow \left(\frac{\partial^2 y^a}{\partial x^k \partial x^l} (m) = 0 \right)$$

Łatwo sprawdzić, że jest to relacja równoważności (zwrotna, symetryczna, przechodnia). Zatem zbiór wszystkich map wokół m rozpada się na wzajemnie rozłączne klasy równoważności.

- W każdym punkcie m wyróżniona jest pewna klasa równoważności I_m , którą nazwiemy „lokalnym układem prostoliniowym” lub też — żeby podkreślić inspirację fizyczną — „lokalnym układem inercjalnym”. Współrzędne odpowiadające mapie należącej do tej klasy będziemy nazywali „lokalnie prostoliniowymi” albo „lokalnie inercjalnymi” w punkcie m . Zakładamy, że I_m zależy gładko (różniczkowalnie) od punktu m . Na razie nie będę precyzował, co to oznacza, ale w dalszym ciągu wykładu stanie się to jasne.
- Sparametryzowaną linię w M będziemy nazywali ortodromą (czy może nawet — nadużywając nieco terminologii — linią „prostą”, a w każdym razie „najprostszą z możliwych”), jeśli w każdym punkcie M spełnia ona warunek

$$\ddot{y}^a(m) = 0 \quad (15)$$

gdy jako współrzędne weźmiemy dowolne współrzędne lokalnie inercjalne w m , czyli należące do klasy I_m .

- Współrzędne inercjalne w jednym punkcie wcale nie muszą być inercjalne w punktach sąsiednich. Gdyby jednak istniał układ współrzędnych **globalnie inercjalny**, to taką przestrzeń nazwalibyśmy **płaską**.

Gdybyśmy mieli zamieszkać na stałe w miejscowości m i badać jedynie ruchy przejeżdżających przez nią pojazdów, to nie warto byłoby używać innych układów współrzędnych, niż tylko inercjalne w punkcie m . Tak postępowali fizycy przez ostatnich kilka tysięcy lat. Jeśli jednak interesują nas zjawiska zachodzące daleko od nas, jeśli chcemy badać ruchy odległych planet, komet czy może nawet gwiazd albo galaktyk, to — podobnie jak to miało miejsce w przypadku nawigacji po ziemskim globie — zmuszeni będziemy używać układów nieinercjalnych, ale za to opisujących dużo większe obszary. Przeliczmy zatem równania ortodromy z układu inercjalnego (y^a) do jakiegokolwiek układu (x^k). Prawo transformacji prędkości z jednego układu do drugiego jest oczywiste

$$\dot{y}^a(m) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial y^a}{\partial x^k} \dot{x}^k = \frac{\partial y^a}{\partial x^k} \dot{x}^k \quad (16)$$

W ostatnim wyrażeniu opuściliśmy znak sumy, korzystając z tak zwanej **konwencji sumacyjnej Einsteina**, która bardzo ułatwia pisanie formuł opisujących struktury geometrii różniczkowej. Głosi ona, że powtórzony wskaźnik — w naszym przypadku „ k ” — raz na dole, raz na górze oznacza sumowanie po wszystkich jego możliwych wartościach. Różniczkując jeszcze raz po parametrze, otrzymujemy następujące równanie ortodromy wyrażone w nieinercjalnym układzie współrzędnych (x^k) (pamiętamy o konwencji sumacyjnej!)

$$0 = \ddot{y}^a = \frac{\partial y^a}{\partial x^k} \ddot{x}^k + \frac{\partial^2 y^a}{\partial x^k \partial x^l} \dot{x}^k \dot{x}^l \quad (17)$$

4. Grawitacja jako pole lokalnych układów inercjalnych

Właśnie taka struktura geometryczna czasoprzestrzeni odpowiada polu grawitacyjnemu według Einsteina. Równania ruchu ciała spadającego swobodnie, to równania ortodromy (18) w czterowymiarowej czasoprzestrzeni, które można przepisać jako

$$m \ddot{x}^n = -m \Gamma_{kl}^n \dot{x}^k \dot{x}^l \quad (20)$$

Interpretację tradycyjną, w której prawa strona jest siłą grawitacyjną działającą na ciało o masie m , zgodnie z drugą zasadą Newtona, Einstein proponuje zastąpić interpretacją geometryczną — prawa strona tylko dlatego nie znika, że do opisu ruchu użyliśmy układu odnie-

Powyższy układ n równań można zapisać w równoważnej postaci, jeśli podziałamy na obie strony macierzą ($\partial x^n / \partial y^a$), odwrotną do macierzy ($\partial y^a / \partial x^k$) (ich iloczyn daje macierz jednostkową (δ_k^n)). W rezultacie otrzymamy następujące, uniwersalne równanie ortodromy, będące naturalnym uogólnieniem równań nawigatora (13) oraz (14)

$$\ddot{x}^n + \Gamma_{kl}^n \dot{x}^k \dot{x}^l = 0 \quad (18)$$

Symbolem Γ_{kl}^n oznaczyliśmy tutaj następującą kombinację pochodnych

$$\Gamma_{kl}^n(m) := \frac{\partial x^n}{\partial y^a}(m) \cdot \frac{\partial^2 y^a}{\partial x^k \partial x^l}(m) \quad (19)$$

We wzorze tym (y^a) są **dowolnymi współrzędnymi inercjalnymi** w punkcie m , w którym liczymy wartość współczynników Γ . Łatwo zauważyć, że wynik nie zależy od wyboru układu współrzędnych (y^a), byle tylko należały do klasy I_m . Wielkości te charakteryzują jednoznacznie układ inercjalny I_m względem naszych (dowolnych), „roboczych” współrzędnych (x^k). Można zatem powiedzieć, że cała informacja o polu lokalnych układów inercjalnych jest zawarta we „współczynnikach powiązania” Γ_{kl}^n . W szczególności układ jest inercjalny w punkcie m jeśli, współczynniki te znikają w tym punkcie

$$((x^k) \in I_m) \Leftrightarrow (\Gamma_{kl}^n(m) = 0)$$

Założenie o „ładkiej zależności” klasy I_m od punktu m oznacza teraz, że elementy tablicy $\Gamma_{kl}^n(m)$ są odpowiednio gładkimi funkcjami na przestrzeni M .

To opowiadanie można ciągnąć dalej — np. łatwo wyprowadzić wzory na transformację obiektu Γ między dwoma dowolnymi (na ogół **nieinercjalnymi**) układami współrzędnych. Zainteresowanych odsyłam do bogatej literatury z geometrii różniczkowej. Jednak główną własnością przestrzeni z powiązaniem jest istnienie pola lokalnych układów inercjalnych, co pozwala na wyróżnienie szczególnych linii „prostych”, dla których „przyspieszenie” (liczone w układzie inercjalnym) znika.

sienia, który nie jest inercjalny! Siły grawitacyjne dadzą się (lokalnie, w punkcie m) wyeliminować, jeśli tylko przejdziemy do **układu inercjalnego** w punkcie m . I nie jest to żadna *science fiction*, lecz realna możliwość. Sto lat temu uważano, że polega ona na zamknięciu się w swobodnie spadającej windzie, gdzie (zanim nastąpi katastrofa) znajdziemy się w stanie całkowitej nieważkości. W takiej sytuacji będziemy mogli uważać, że sił grawitacyjnych nie ma! W dzisiejszych czasach stan nieważkości stał się powszechnym doświadczeniem wielu ludzi — astronautów i pracowników stacji kosmicznych.

Siły grawitacyjne uzyskały zatem status „sił pozornych” z mechaniki klasycznej, takich jak siła odśrodkowa

czy siła Coriolisa. Są one proporcjonalne do masy ciała. Można je wyeliminować przez wybór odpowiedniego (inercjalnego!) układu odniesienia. Możliwość sprawdzenia, czy „nasz układ odniesienia” jest inercjalny „względem odległych gwiazd” bardzo absorbowwała myśl Ernesta Macha, którego idee wywarły duży wpływ na Einsteina, czemu dał on wielokrotnie wyraz w swych pismach. Pasażer obracającej się karuzeli — argumentował Mach — jeśli nie pozwolić mu na obserwację gwiazd, nie potrafi stwierdzić, czy działające nań siły, to siły pozorne, czy też „prawdziwe” siły grawitacyjne. Ze wstydem wyznam, że z wielkim trudem podążałem za

niektórymi myślami Macha, spisanyymi w języku **globalnych układów odniesienia**. Wydaje mi się, że cała sprawa staje się niezwykle prosta i klarowna, jeśli zrezygnujemy z globalnych układów odniesienia i całe rozważania ograniczymy do przytoczonej w niniejszym wykładzie dyskusji **lokalnej struktury czasoprzestrzeni**. W tej teorii dylemat Macha — czy działają na mnie siły pozorne (odśrodkowa i Coriolisa), czy grawitacyjne — nie ma żadnego znaczenia. Niezależnie od nazwy, siły te mogą zostać wyeliminowane. Ale tylko **lokalnie** wyeliminowane.

5. Jak mierzyć krzywiznę czasoprzestrzeni

Jeśli w zwykłej, płaskiej przestrzeni wybierzemy krzywoliniowy układ współrzędnych, to równania linii prostych staną się bardzo skomplikowane. Można się o tym łatwo przekonać, próbując napisać np. równanie prostej w układzie współrzędnych sferycznych, w poczciwej, znanej ze szkolnej „stereometrii” — trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej. Wystąpią wtedy wysoce nietrywialne współczynniki powiązania Γ_{kl}^n . Część z nich — te mianowicie, które odpowiadają współrzędnym kątowym — pojawiła się już zresztą w niniejszym artykule pod postacią współczynników (8). Pokażemy teraz, w jaki sposób odróżnić sytuację, gdy przestrzeń jest naprawdę prosta, a jedynie prezentuje się jakby była krzywa, bowiem używamy skomplikowanego, krzywoliniowego układu, od sytuacji, kiedy przestrzeń jest **naprawdę krzywa**. Rozpocniemy od „wyprostowania” krzywych współrzędnych (x^k) w jednym punkcie m za pomocą wzoru

$$y^k := x^k + \frac{1}{2} \Gamma_{ij}^n(m) x^i x^j + \text{poprawki trzeciego i wyższych rzędów} \quad (21)$$

Aby się przekonać, że tak poprawione współrzędne (y^k) są inercjalne w punkcie m wystarczy zauważyć, że zachodzi równość (19)

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^n(m) &:= \frac{\partial^2 y^k}{\partial x^i \partial x^j}(m) = \\ &= \frac{\partial x^k}{\partial y^a}(m) \cdot \frac{\partial^2 y^a}{\partial x^i \partial x^j}(m) \end{aligned} \quad (22)$$

bowiem macierz pierwszych pochodnych jest macierzą jednostkową. Czy nie dałoby się — do tej pory nieistotnych — poprawek wyższych rzędów dobrać tak, by wyprostować te współrzędne nie tylko w samym punkcie, ale i wokół niego? Na początku przynajmniej tak, by wyzerować w tym punkcie nie tylko współczynniki powiązania (co już się stanie, gdy tylko przejdziemy do zmiennych (y^a)), ale również ich pierwsze pochodne

$$\Gamma_{bcd}^a := \partial_d \Gamma_{bc}^a$$

W tym celu znów zaczniemy poprawiać już raz poprawione współrzędne, przy czym istotne teraz będą po-

prawki trzeciego rzędu, bowiem tylko one dadzą wkład do pochodnych, liczonych w zerze układu współrzędnych. Ogólna taka poprawka mogłaby wyglądać następująco

$$\tilde{y}^a := y^a + \frac{1}{2} P_{bc}^a y^b y^c + \frac{1}{6} Q_{bcd}^a y^b y^c y^d \quad (23)$$

Po to jednak, by coś naprawić, ale przy tym nie popsuć **już** znikających współczynników Γ_{bc}^a , musimy położyć $P_{bc}^a = 0$. Wtedy współczynniki te zmieniają się o drugie pochodne wyrazu trzeciego rzędu (czyli o człony liniowe, znikające w zerze), natomiast ich pochodne zmieniają się o trzecie pochodne, czyli o człon zerowego rzędu, wyznaczony przez tablice współczynników Q_{bcd}^a . Z symetrii trzecich pochodnych wynika, że będzie to część całkowicie symetryczna tej tablicy. Gdyby jednak Q_{bcd}^a zawierała cokolwiek poza tą częścią symetryczną, to owe „cokolwiek” (np. część antysymetryczna w jakichś dwu wskaźnikach) i tak nie wpłynie na poprawkę (23). Aby zatem uprościć nasze rachunki, możemy założyć, że tablica Q_{bcd}^a jest całkowicie symetryczna

$$Q_{bcd}^a = Q_{(bcd)}^a \quad (24)$$

$$:= \frac{1}{6} \{ Q_{bcd}^a + Q_{cdb}^a + Q_{dbc}^a + Q_{dcb}^a + Q_{cbd}^a + Q_{bdc}^a \} \quad (25)$$

Wtedy pochodne współczynników powiązania Γ w nowym układzie współrzędnych zmieniają się po prostu o Q

$$\tilde{\Gamma}_{bcd}^a = \Gamma_{bcd}^a + Q_{bcd}^a \quad (26)$$

które są całkowicie do naszej dyspozycji. Jak widać, potrafilibyśmy w ten sposób „zabić” całą tablicę pochodnych Γ_{bcd}^a jedynie wtedy, gdyby była ona całkowicie symetryczna — wystarczyłoby położyć $Q_{bcd}^a = -\Gamma_{bcd}^a$. W ogólnym przypadku, gdy Γ_{bcd}^a nie jest całkowicie symetryczna, zdołamy jedynie „zabić” jej część całkowicie symetryczną. Wynika stąd, że cała reszta, czyli to, co zostaje po odjęciu części całkowicie symetrycznej

$$K_{bcd}^a = \Gamma_{bcd}^a - \Gamma_{(bcd)}^a \quad (27)$$

nie zależy już od żadnych poprawek, czyli jest pewną wielkością charakteryzującą badaną geometrię, niez-

leżną od tego w jakim układzie współrzędnych (byle był inercjalny!) dokonujemy obliczeń. Rzeczywiście, po dokonaniu poprawek (23) otrzymujemy

$$\begin{aligned} K_{bcd}^a &= \tilde{\Gamma}_{bcd}^a - \tilde{\Gamma}_{(bcd)}^a = \\ &= \Gamma_{bcd}^a + Q_{bcd}^a - \Gamma_{(bcd)}^a - Q_{(bcd)}^a = K_{bcd}^a \end{aligned} \quad (28)$$

na mocy równania (24). Wielkość K nazywa się **tenso-rem krzywizny** przestrzeni M . Gdy jest ona różna od zera, to — jak widać z definicji — nie ma szans na istnienie globalnego układu inercjalnego, który „zabiłby” współczynniki Γ globalnie, bowiem „zabiłby” on również ich pochodne oraz (w szczególności) ich kombinacje (27). Zatem znikanie tensora krzywizny jest warunkiem koniecznym na płaskość przestrzeni. Czy jest to również warunek dostateczny? Czy po wyzerowaniu pierw-

szych pochodnych będziemy musieli zająć się zerowaniem kolejnych i tak w nieskończoność?

Okazuje się, że nie będzie to potrzebne, bowiem zerowanie się tensora krzywizny K w „grubym” zbiorze pozwala już skonstruować współrzędne globalnie inercjalne w tym zbiorze. Zatem znikanie K jest warunkiem koniecznym i dostatecznym na płaskość. **Tensor krzywizny mierzy rzeczywistość krzywiznę**, rozumianą jako niemożność skonstruowania globalnie inercjalnych współrzędnych. Mistyfikacja polegająca na zapisaniu współczynników powiązania **płaskiej przestrzeni** w krzywoliniowym układzie współrzędnych, przez co będą one wyglądały bardzo skomplikowanie, zostanie natychmiast odkryta, gdy obliczymy tensor krzywizny, bowiem mimo pozornie skomplikowanej postaci funkcji $\Gamma_{bcd}^a(m)$, ostateczny rezultat takich rachunków będzie trywialny: $K_{bcd}^a \equiv 0$.

6. Materia powodem zakrzywienia czasoprzestrzeni

W teorii grawitacji Einsteina pole grawitacyjne jest zatem polem lokalnych układów inercjalnych, które można opisać w ustalonym układzie współrzędnych jako pole zależnych od punktu czasoprzestrzeni współczynników powiązania $\Gamma_{bc}^a(m)$. Ale czym zastąpić równania pola, które w teorii Newtona wyglądały następująco

$$\vec{G} = -\gamma \frac{\mu \vec{x}}{\|\vec{x}\|^3} \quad (29)$$

gdzie μ jest masą ciała będącego źródłem pola (np. słońca w układzie planetarnym), \vec{x} — wektorem wiodącym ciała próbnego względem źródła, zaś γ — stałą grawitacyjną. Gdy źródłem pola nie jest masa punktowa ale ciągły rozkład mas, opisany gęstością ρ , to pole \vec{G} jest superpozycją wkładów od poszczególnych punktów. Łatwo zauważyć, że odpowiada to następującym warunkom, które spełnia to pole:

1. Pole \vec{G} jest bezwirowe, czyli $\text{rot } \vec{G} = 0$.
2. Spełnione jest równanie wiążące rozbieżność pola ze źródłami, mianowicie $\text{div } \vec{G} = 4\pi\gamma\rho$.

Okazuje się, że w teorii Einsteina powyższe warunki należy zastąpić następującymi:

1. Warunek zgodności z resztą fizyki, opisaną przez strukturę metryczną czasoprzestrzeni, bowiem inne działy fizyki (np. elektrodynamika) wykorzystują pole tensora metrycznego g_{kl} , opisujące „odległości” czterowymiarowe między różnymi zdarzeniami przestrzennymi. Strukturą tego tensora zajmuje się tzw. szczególna teoria względności. Zgodność obu struktur polega na tym, że tensor metryczny ma być w jakimś sensie „stały” w czasoprzestrzeni. Cóż to jednak ma znaczyć, skoro przechodząc od jednego układu współrzędnych do innego, można współrzędne g_{kl} znacznie zmienić i np. ze stałych uczynić zmienne? Otóż warunek ten oznacza, że pochodne

tensora metrycznego mają zerować się **w układzie inercjalnym**. Mówi się wówczas, że metryka jest **kowariantnie stała** na M . Warunek ten zastępuje jednorodny warunek $\text{rot } \vec{G} = 0$ z teorii newtonowskiej.

2. Warunek niejednorodny zastąpiony jest **równaniem Einsteina**, wiążącym krzywiznę ze źródłami pola

$$G_{kl} = 8\pi\gamma T_{kl}$$

W równaniu tym

$$G_{kl} := R_{kl} - \frac{1}{2}g_{kl}R$$

oznacza tzw. tensor Einsteina, $R_{kl} := \frac{3}{2}K_{kl}^n$ jest tzw. tensorem Ricciego, powstałym z tensora krzywizny przez zwężenie po pierwszym i ostatnim wskaźniku, zaś $R = g^{kl}R_{kl}$ jest śladem tensora Ricciego, zwanym **skalarem krzywizny**. W każdym przypadku po lewej stronie stoi (na miejscu dywergencji pola \vec{G} z teorii Newtona) jakaś informacja o krzywiznie, wyrażona pochodnymi pola Γ . Natomiast po prawej stronie stoi tensor energii-pędu materii T , niosący informację o źródłach pola grawitacyjnego.

Jeśli czasoprzestrzeń nie jest pusta, czyli gdy stojący po prawej stronie równań Einsteina tensor energii-pędu materii nie jest równy zeru, to również lewa strona nie może zniknąć, zatem czasoprzestrzeń nie może być płaska. Można skrótowo powiedzieć, że obecność materii, której konfiguracja jest mierzona wielkością tensora energii-pędu T , „wykrzywia” czasoprzestrzeń.

Nie jest natomiast prawdą, że przestrzeń pusta musi być płaska. Z równań Einsteina wynika jedynie znikanie tensora Einsteina G lub — co jest równoważne — tensora Ricciego R , ale jest to jedynie część informacji zawartych w pełnym tensorze krzywizny K . Dziś wiemy już, że wcale nie musi to pociągać znikania całego ten-

sora krzywizny. Istnieją bowiem rozwiązania równań Einsteina opisujące przestrzeń pustą, ale mimo to krzywawą. Jej krzywizna propaguje się w sposób nieco zbliżony (choć dużo trudniejszy, ze względu na nieliniowość równań Einsteina) do propagacji fal elektromagnetycznych i opisuje zjawiska, które nazywamy **falami grawitacyjnymi**. Ten fakt nie był oczywisty od początku ba-

dań teorii. Sam Einstein miał poważne wątpliwości na ten temat i dość długo sadził, że „fal grawitacyjnych nie ma”. W (teoretycznym) odkryciu tych fal wybitny udział ma wielki polski fizyk-teoretyk — profesor Andrzej Trautman (absolwent Politechniki Warszawskiej). Na powtórne — tym razem obserwacyjne — ich odkrycie czekamy do tej pory.

7. Krótka historia odkrywania „czarnych dziur”

Już kilka miesięcy po ogłoszeniu Ogólnej Teorii Względności — na przełomie 1915 i 1916 roku — wybitny niemiecki astronom, fizyk i matematyk, Karl Schwarzschild znalazł pierwsze ścisłe rozwiązanie równań Einsteina, opisujące sferycznie symetryczne pole grawitacyjne wokół ciężkiego ciała o danej masie. Rozwiązanie to jest relatywistycznym odpowiednikiem pola (29). Scenerię tego odkrycia znamy dobrze z książki Jaroslava Haška o dobrym wojaku Szwejku — okolice Przemyśla, błoto i śnieg, okopy pierwszej wojny światowej. Karl Schwarzschild został zmobilizowany na wojnę w charakterze oficera artylerii, jednak nawet w tak trudnych warunkach nie porzucił aktywności intelektualnej. Zresztą kilka miesięcy po swoim wspaniałym odkryciu, w maju 1916 roku, zmarł na skutek rzadko spotykanej choroby skórnej — pęcherzycy, której nabawił się na wojnie.

Podobnie jak pole (29) w punkcie $\vec{x} = 0$, rozwiązanie Schwarzschilda cechuje się osobliwością, gdy opisujące je formuły tracą sens, bowiem zawierają dzielenie przez zero. Jednak w przypadku pola Schwarzschilda ta osobliwość występuje wcześniej, zanim zbliżymy się do „centrum” punktowej masy, którą chcielibyśmy opisywać. W przypadku masy równej masie Ziemi ten krytyczny „promień Schwarzschilda” wynosi około centymetra, a dla masy Słońca — około 3 km. Można byłoby pocieszać się, że w przyrodzie nigdy taka osobliwość nie wystąpi, bo nie potrafimy przecież „sprasować” masy Ziemi do rozmiarów centymetra! Dziś wiemy jednak,

że materia w tzw. gwiazdach neutronowych może być upakowana **dużo gęściej** niż to, z czym mamy do czynienia w potocznym doświadczeniu i, być może, istnieją sytuacje astrofizyczne, w których cała masa będąca źródłem geometrii Schwarzschilda jest ukryta wewnątrz tej „osobliwości”. Zatem problem pozostaje. Co się dzieje w „osobliwości” rozwiązania Schwarzschilda? Czy przestaje obowiązywać znana nam fizyka? Czy wewnątrz obszaru o silnej krzywiznie dzieje jakaś otchłań, czy jest tam po prostu „czarna dziura”? Okazuje się, że sama osobliwość występująca we wzorach na rozwiązanie Schwarzschilda, która tak niepokoiła fizyków od początku Ogólnej Teorii Względności, jest pozorna i opisuje jedynie własności szczególnego układu współrzędnych, których użył jego twórca.

Sytuacja jest podobna do tej, w której chcielibyśmy punkty paraboloidy obrotowej w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej, danej równaniem

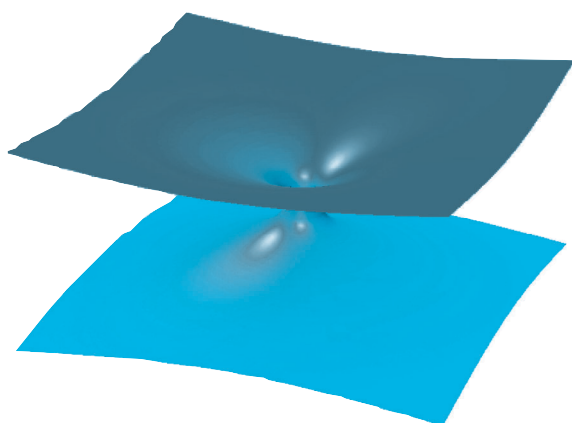
$$\sqrt{x^2 + y^2} = 1 + z^2$$

parametryzować za pomocą dwu zmiennych (x, y) , traktując współrzędną z jako ich funkcję

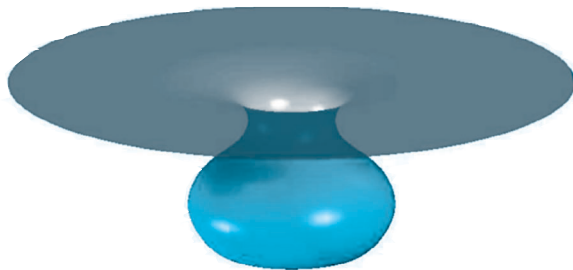
$$z = +\sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} - 1}$$

Widać, że na kole danym równaniem $x^2 + y^2 = 1$, taki opis zawodzi, bowiem występuje „czarna dziura” odpowiadająca wartościom $x^2 + y^2 < 1$, a przecież nie ma tu żadnej osobliwości, należy jedynie do zbioru rozwiązań powyższego równania, opisującego górną połowę paraboloidy, dokleić jej dolną połowę, odpowiadającą znakowi „minus” przed pierwiastkiem. Bardzo łatwo znaleźć współrzędne, które zachowują się nieosobliwie w pobliżu „wąskiego gardła”, wzdłuż którego sklejoną obie połowki tej powierzchni.

Takim właśnie „wąskim gardłem” trójwymiarowego cięcia $\{t = \text{const}\}$ jest pozorna osobliwość Schwarzschilda (zob. rys. 3). Z dala od niej to cięcie coraz bardziej przypomina naszą płaską, euklidesową przestrzeń trójwymiarową. Zbliżając się do „wąskiego gardła” przestrzeń staje się coraz bardziej zakrzywiona, a po jego przekroczeniu znów zaczyna się wypłaszczać — być może aż do jakiegoś „drugiego końca” przestrzeni, jak na rysunku 3, ale być może aż do schowanej wewnątrz tego gardła materii, będącej źródłem pola grawitacyjnego, tak jak na rysunku 4.



Rysunek 3. Cięcie $\{t = \text{const}\}$ czasoprzestrzeni Schwarzschilda



Rysunek 4. Materia „schowana pod horyzontem”

Tym niemniej obszar czasoprzestrzeni odpowiadający punktom leżącym wewnątrz tego „gardła” ma dość szczególne właściwości, bowiem nie może się zeń wy dostać „na zewnątrz” żadna informacja. Co więcej, **tam naprawdę jest osobliwość** (ale nie przestrzenna, którą można byłoby pokazać na rysunku 4, lecz **czaso-przestrzenna**) nie dająca się usunąć przez manipulacje współzrędnymi. Obecnie „czarną dziurą” nazywa się taką właśnie sytuację.

Teorii czarnych dziur nadał impet wielki astrofizyk hinduski Subrahmanyan Chandrasekhar (1910–1995), uhonorowany za swe prace nagrodą Nobla w 1983 roku. W 1930 roku, wiążąc dwie bardzo młode teorie fizyczne — Ogólną Teorię Względności i Mechanikę Kwantową — zauważył, że ewolucja gwiazdy do stacjonarnego stanu Białego Karła, w którym ciśnienie gazu elektronowego wewnątrz gwiazdy powinno zrównoważyć siły grawitacyjne, będzie zachodziła zupełnie inaczej dla gwiazd cięższych niż pewna wartość krytyczna, znana dziś jako masa Chandrasekhara i wynosząca 1,44 masy Słońca. Otóż dla ciężkiej gwiazdy ciśnienie

wewnętrzne nie zdoła zrównoważyć przyciągania grawitacyjnego i w końcu cała masa zapadnie się „pod horyzont” jak na rysunku 4. Uformuje się więc czarna dziura, a w każdym razie widziana z zewnątrz pole grawitacyjne będzie miało wiele cech sytuacji opisywanej przez geometrię Schwarzschilda. Wydaje się, że jest to sytuacja dość powszechna we Wszechświecie i powinniśmy na niebie widzieć wiele takich obiektów. Aby je odróżnić od zwykłych gwiazd czy galaktyk potrzebne są dokładniejsze obserwacje niż te, których można dokonywać za pomocą tradycyjnych teleskopów. W tym celu buduje się obecnie obserwatoria umieszczone w Kosmosie. Takie dwa orbitalne obserwatoria — Spitzer oraz Chandra — dostarczyły ogromnej ilości danych potwierdzających istnienie czarnych dziur. Astrofizycy mówią ostatnio o „setkach czarnych dziur, które zostały ostatnio odkryte w odległych galaktykach pyłowych”.

Bardzo istotna metoda testowania wyników tych obserwacji, pomagająca odróżnić czarną dziurę od „banalnej” gwiazdy lub galaktyki, polega na wykorzystaniu zjawiska soczewkowania grawitacyjnego. Wykorzystuje ona zjawisko uginania promieni świetlnych w polu grawitacyjnym. Jednym z animatorów i współautorów tej metody był niedawno zmarły, wybitny polski astrofizyk Bogdan Paczyński (ur. 1940 w Wilnie, zm. 2007 w Princeton).

Dzięki tym wszystkim obserwacjom i pomiarom astrofizycy coraz mocniej utwierdzają się w przekonaniu, że matematyczna konsekwencja teoretycznych idei Alberta Einsteina, jaką jest struktura czarnej dziury, istnieje jako fakt realnie obserwowany w przyrodzie.

Bibliografia

- [1] Kopczyński W., Trautman A.: *Czasoprzestrzeń i grawitacja*. PWN, Warszawa 1981.
- [2] Misner C.W., Thorne K.S., Wheeler J.A.: *Gravitation*. N.H. Freeman and Co, San Francisco, Cal. 1973.
- [3] Wald R.: *General Relativity*. University of Chicago Press, Chicago 1984.

Słowa kluczowe: czarne dziury, ogólna teoria względności, geometria nieeuklidesowa, nieinercjalne układy współrzędnych.

Abstract

Short history of the General Relativity Theory (together with theory of “black holes”) is presented. A mathematical structure which enables us to describe gravitational field as a field of local inertial frames is proposed in

a simple form. The notion of the curvature tensor is derived as an obstruction against existence of linear coordinates.

